

ALGORITMUS VÝPOČTU WAVELETŮV POMOCOU BANKY ZRKADLOVÝCH FILTROV

(AN ALGORITHM FOR CALCULATION OF WAVELETS BY USING QUADRATURE MIRROR FILTER BANK)

Jozef ZAVACKÝ, Ján MIHALÍK

Laboratórium číslicového spracovania obrazov a videokomunikácií, Katedra elektroniky a multimediálnych telekomunikácií,
Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita v Košiciach,
Park Komenského 13, 041 20 Košice, Slovenská republika,
tel.:055/602 4309, 055/602 2854, E-mail: Jozef.Zavacky@tuke.sk, Jan.Mihalik@tuke.sk

SUMMARY

The paper deal with an algorithm of calculation of orthonormal K -channel wavelets by iterating on the impulse response coefficients of the quadrature mirror filters(QMF) having linear-phase. The K -channel bank of QMF with perfect reconstruction property, in contrast with conventional design techniques that attempt to find a unitary alias-component matrix in the frequency domain, will be designed in the time domain, based on time-domain orthonormality constraints. The K -channel design problem is reduced to the problem of finding a suitable lowpas filter $g_0(n)$ via iterative optimization method maximizing subband gain for various combinations of K -channels and the filter length N . By imposing further constraints on the lowpas impulse response, the continuous bases of K -channel wavelets and scaling function with good regularity properties were constructed.

Keywords: subband system, wavelet transform, quadrature mirror filter bank, perfect reconstruction, wavelets, scaling function

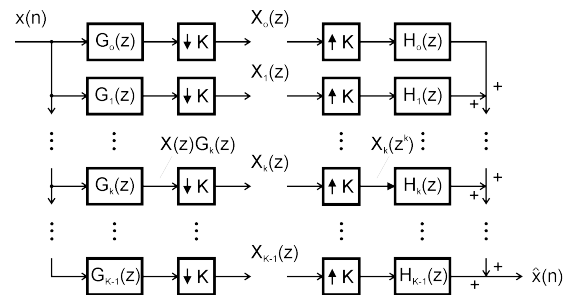
1. ÚVOD

Bankám kvadratúrnych zrkadlových filtrov (QMF – quadrature mirror filter) sa v posledných rokoch venovala veľká pozornosť [3,4,8,14,15,16]. Tie sú aktuálne hlavne v aplikáciách s dekompozíciou signálu na zložky rôzneho rozlíšenia a s waveletovou transformáciou. Ide hlavne o subpásmové kódovacie systémy pre efektívne kódovanie rečových a obrazových signálov s cieľom dosahovať vysokú kompresiu údajov. Dvojkanálovú banku QMF filtrov s dokonalou rekonštrukciou (DR) prvý krát navrhli Smith a Barnwell [10]. Neskôr, na báze teórie bezstratových systémov, Vaidyanathan sformuloval podmienky DR pre viackanálové banky QMF [9,12]. Väčšina mnohokanálových bánk QMF používa filtre s konečnou impulznou odozvou. Boli navrhnuté aj banky QMF s filterami s nekonečnou impulznou odozvou, ale pre tieto je problematické dosiahnuť ich stabilitu.

Neskôr bol zistený vzťah medzi mnohokanálovými bankami QMF a waveletovou transformáciou. To viedlo k výskumu metód rozkladu signálov pomocou waveletovej transformácie (WT) [5,11,13]. Mallat dokázal, že ortonormálna waveletova transformácia je funkčne ekvivalentná banke analýzy subpásmového systému s vlastnosťou dokonalkej rekonštrukcie [6]. Z tejto súvislosti vyplynul vzťah medzi bankami QMF a waveletmi [2]. Tento článok sa zaoberá metódou návrhu mnohokanálovej banky QMF v časovej oblasti s lineárnou fázovou frekvenčnou charakteristikou a DR. Tieto sú potom použité pre výpočet ortonormálnych waveletov konečnej dĺžky s vlastnosťou symetrie a s dobrou regularitou.

2. NÁVRH BANKY QMF S LINEÁRNOU FÁZOVOU FREKVENČNOU CHARAKTERISTIKOU A DR V ČASOVEJ OBLASTI

Maximálne decimovaná banka QMF s počtom kanálov K je na obr. 1, pričom $G_k(z)$ sú prenosové funkcie filtrov analýzy a $H_k(z)$ filtrov syntézy.



Obr. 1 K – kanálová maximálne decimovaná banka QMF

Fig. 1 K – channel maximally decimated QMF bank

Pre prenosovú funkciu banky QMF bez aliasingu dostaneme [10,11]

$$T(z) = \hat{X}(z) / X(z) = (1/K) \sum_{k=0}^{K-1} G_k(z) H_k(z) \quad (1)$$

Pritom pre dokonalú rekonštrukciu musí platiť

$$T(z) = cz^{-n_0} \quad (2)$$

pričom c je ľubovoľná konštanta a n_0 kladné celé číslo oneskorenia v časovej oblasti. Potom dokonale rekonštruovaný časove oneskorený signál bude

$$\tilde{x}(n) = cx(n - n_0) \quad (3)$$

Na rozdiel od konvenčných metód návrhu, tejto banky QMF, ktoré hľadajú paraunitárnu maticu aliasingových zložiek [5]

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) & \dots & G_{K-1}(z) \\ G_0(zW) & G_1(zW) & \dots & G_{K-1}(zW) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_0(zW^{K-1}) & G_1(zW^{K-1}) & \dots & G_{K-1}(zW^{K-1}) \end{bmatrix}$$

$$W = e^{j2\pi/K} \quad (4)$$

pre ktorú platí

$$\tilde{\mathbf{G}}(z)\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}(z)\tilde{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{I} \quad (5)$$

vo frekvenčnej oblasti, vykonáme jej návrh založený na podmienkach ortogonalít v časovej oblasti, ktorým QMF musia vyhovávať. Poznamenajme, že \mathbf{I} je jednotková matica rozmeru $K \times K$. Matica $\tilde{\mathbf{G}}(z) = \mathbf{G}_*^T(z^{-1})$, pričom dolný index “*” znamená, že všetky koeficienty musia byť nahradené ich konjugovanými hodnotami a symbol T transpozíciu. V prípade platnosti rov. (5) a za predpokladu, že QMF analýzy budú mať konečnú impulznú odozvu dĺžky N a lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku, pričom platí rov. (2) dá sa ukázať, že QMF syntézy $H_k(z) = \pm G_k(z)$. Ak impulzná charakteristika $g_k(n)$ je symetrická, t.j. $g_k(n) = g_k(N-1-n)$ platí znamienko plus a ak $g_k(n)$ je antisymetrická, t.j. $g_k(n) = -g_k(N-1-n)$ platí znamienko mínus.

Metóda návrhu QMF analýzy $G_k(z)$, $k=0,1,\dots,K-1$ sa pritom redukuje na problém nájdenia vhodného dolnopriepustného filtra (DP) s impulznou charakteristikou $g_0(n)$. Akonáhle je tento DP filter navrhnutý, zostávajúci počet $(K-1)$ filtrov sa získa aplikovaním operátorov preusporiadania na jeho impulznú charakteristiku. Aby matica $\mathbf{G}(z)$ bola paraunitárna, jej stĺpce musia tvoriť ortonormálnu bázu vektorov. V časovej oblasti tomu zodpovedá ekvivalentná požiadavka [1]

$$\sum_n g_k(n)g_j(n-kK) = \delta_k \delta_{i-j} \quad (6)$$

kde $g_k(n)$, $k=0,1,\dots,K-1$ sú impulzné charakteristiky QMF analýzy. Pri návrhu budeme vychádzať z obmedzení pre nasledovné parametre. Budeme uvažovať, že N (dĺžka impulznej charakteristiky QMF) je celočíselným násobkom počtu kanálov K a počet kanálov je celočíselnou mocninou dvoch, t.j. $K = 2^l$. Nech $\mathbf{g}_k(n)$ je stĺpcový vektor impulznej charakteristiky QMF analýzy v k -tom kanáli definovaný nasledovne

$$\mathbf{g}_k(n) = [g_k(0) \quad g_k(1) \quad \dots \quad g_k(N-1)]^T \quad (7)$$

a matica posunutia

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N-K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Potom podmienku ortonormality (6) môžeme zapísať v maticovom vyjadrení takto

$$\mathbf{g}_i^T \mathbf{W}^k \mathbf{g}_j = \delta_k \delta_{i-j} \quad (9)$$

Ďalej predpokladajme, že prvý z K QMF s impulznou charakteristikou \mathbf{g}_0 je známy a má lineárnu fázovú frekvenčnú charakteristiku (pozitívne symetrický). Potom vyhovuje podmienke ortonormality

$$\mathbf{g}_0^T \mathbf{W}^k \mathbf{g}_0 = \delta_k, \quad k = 0, \dots, (N/K) - 1 \quad (10)$$

Zostavujúcich $(K-1)$ filtrov bude definovaných pomocou \mathbf{g}_0 takto

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{B}_i \mathbf{g}_0, \quad i = 1, \dots, K-1 \quad (11)$$

kde matice \mathbf{B}_i sú transformačné matice filtrov. Dosadením rov. (11) do rov. (9) dostaneme

$$\mathbf{g}_0^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{W}^k \mathbf{B}_j \mathbf{g}_0 = \delta_k \delta_{i-j} \quad (12)$$

Nech

$$\mathbf{C}_{i,j,k} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{W}^k \mathbf{B}_j \quad (13)$$

Potom rov. (12) bude mať tvar

$$\mathbf{g}_0^T \mathbf{C}_{i,j,k} \mathbf{g}_0 = \delta_k \delta_{i-j} \quad (14)$$

Pretože impulzná charakteristika DP filtra spĺňa podmienku $g_0(n) = g_0(N-1-n)$, môžeme vektor \mathbf{g}_0 zapísať v tvare

$$\mathbf{g}_0 = [\tilde{\mathbf{g}}_0 \quad \mathbf{J}_{N/2} \tilde{\mathbf{g}}_0]^T \quad (15)$$

pričom $\tilde{\mathbf{g}}_0$ je stĺpcový vektor prvej polovice koeficientov impulznej charakteristiky, t.j.

$$\tilde{\mathbf{g}}_0 = [g_0(0) \quad g_0(1) \quad \dots \quad g_0(N/2-1)]^T \quad (16)$$

\mathbf{J}_M je matica rozmeru $M \times M$ definovaná nasledovne

$$\mathbf{J}_M = [\mathbf{a}_{jk}]_{M \times M}, \quad \mathbf{a}_{jk} = \delta_{M+1-j-k} \quad (17)$$

kde M závisí na dĺžke filtrov N a počte kanálov K pre konkrétny prípad. Rozdelením matice $\mathbf{C}_{i,j,k}$ do štyroch kvadrantov máme

$$\mathbf{C}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{i,j,k}^{(1)} & \mathbf{C}_{i,j,k}^{(2)} \\ \mathbf{C}_{i,j,k}^{(3)} & \mathbf{C}_{i,j,k}^{(4)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Potom môžeme prepísať rov. (14) do kompaktnejšieho tvaru používajúc $\tilde{\mathbf{g}}_0$ namiesto \mathbf{g}_0 , t.j.

$$\tilde{\mathbf{g}}_0^T \mathbf{D}_{i,j,k} \tilde{\mathbf{g}}_0 = \delta_k \delta_{i-j} \quad (19)$$

kde

$$\mathbf{D}_{i,j,k} = \mathbf{C}_{i,j,k}^{(1)} + \mathbf{C}_{i,j,k}^{(2)} \mathbf{J}_{N/2} + \mathbf{J}_{N/2} \mathbf{C}_{i,j,k}^{(3)} + \mathbf{J}_{N/2} \mathbf{C}_{i,j,k}^{(4)} \mathbf{J}_{N/2} \quad (20)$$

Teraz môžeme stanoviť podmienky, za ktorých QMF definované rov. (11) tvoria systém s DR. Pre každú kombináciu indexov i, j a k , musí byť splnená jedna z nasledujúcich podmienok :

a) Matica $\mathbf{C}_{i,j,k}$ sa rovná celočíselnej mocnine matice \mathbf{W} , t.j.

$$\mathbf{C}_{i,j,k} = \mathbf{W}^{k'} \quad , \quad 0 \leq k' \leq (N/K) - 1 \quad (21)$$

a $\mathbf{D}_{i,j,k}$ sa vypočíta podľa rov. (20). Potrebné je pripomenúť, že \mathbf{g}_0 bolo zvolené tak, aby vyhovovalo rov. (9) a bude tiež vyhovovať rov. (19), ak je splnená podmienka (21).

b) Matica $\mathbf{D}_{i,j,k}$ je v tvare

$$\mathbf{D}_{i,j,k} = 2\mathbf{I}_{N/2} \delta_k \delta_{i-j} \quad (22)$$

Pretože $\tilde{\mathbf{g}}_0^T \tilde{\mathbf{g}}_0 = 0,5$, bude matica daná rov. (22) vyhovovať aj rov. (20).

c) $\mathbf{D}_{i,j,k}$ má symetrickú vlastnosť pre $i \neq j$ alebo pre $k \neq 0$, t.j.

$$\mathbf{D}_{i,j,k} = -\mathbf{D}_{i,j,k}^T \quad i \neq j, \text{ a/alebo } k \neq 0 \quad (23)$$

d) Podmienka ortonormality (19) je splnená nie na základe $\mathbf{D}_{i,j,k}$ ale položením dodatočného ohraničenia na \mathbf{g}_0 .

Od tohto okamihu je problém orientovaný na nájdenie množiny transformačných matíc filtrov $\mathbf{B}_i, i=1, \dots, K-1$, ktoré budú vyhovovať rov. (19). V ideálnom prípade by sme chceli nájsť také riešenie, ktoré využíva vyššie uvedené podmienky a), b) a c) a vyhýba sa podmienke d) tak, aby dodatočné ohraničenia (t.j. okrem podmienky (10), ktorá musí byť splnená) pre voľbu \mathbf{g}_0 neboli nutné. Avšak takéto riešenie je veľmi obtiažné získať. Preto bol urobený kompromis a zvolený taký postup, ktorý využíva podmienku d) niekoľko krát. Za tým účelom definujeme maticu

$$\mathbf{P}_M = \left[p_{jk} \right]_{M \times M} \quad p_{jk} = (-1)^j \delta_{j-k} \quad (24)$$

a maticu preusporiadania koeficientov N - tého rádu a i -tej úrovne

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{P}_{N/2^i} \otimes \mathbf{J}_2 \quad (25)$$

kde symbol \otimes označuje Kronekerovský súčin dvoch matíc. Násobenie daného vektora \mathbf{g}_0 maticou preusporiadania generuje preusporiadanú verziu tohto vektora, v ktorom sú hodnoty zložiek tie isté ako v \mathbf{g}_0 , len sa vyskytujú na iných zmenených pozíciách. Potom môžeme vytvoriť množinu transformačných matíc filtrov \mathbf{B}_j použitím uspo-

riadaných permutácií vyššie definovaných matíc preusporiadania nasledujúcim spôsobom

$$\mathbf{B}_j = \prod_{i=1}^{\log_2 K - 1} \mathbf{A}_i^{r_{ji}} \quad j = 0, \dots, (K/2) - 1 \quad (26)$$

kde konštanty r_{ji} nadobúdajú hodnoty z množiny $\{0,1\}$ a zodpovedajú i -tému bitu s najmenším významom v binárnom vyjadrení celého čísla j . Pre $K = 8$, hodnoty $r_{11}=1, r_{12}=0$ a $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1^1 \mathbf{A}_2^0 = \mathbf{A}_1$, pričom

$$\{\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3\} = \{\mathbf{I}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2\}. \quad (27)$$

Poznamenajme, že v rov. (26) definuje iba prvých $K/2$ transformačných matíc filtrov. Zvyšných $K/2$ matíc získame zo vzťahu

$$\mathbf{B}_{K-j-1} = -\mathbf{P}_N \mathbf{B}_j \quad j = 0, \dots, (K/2) - 1 \quad (28)$$

Z rov. (11) a (28) vyplýva potom vzťah medzi impulznými charakteristikami QMF analýzy

$$\mathbf{g}_{K-j-1}(n) = (-1)^n \mathbf{g}_j(n), \quad j = 0, \dots, (K/2) - 1 \quad (29)$$

alebo ekvivalentne

$$G_{K-j-1}(z) = G_j(-z), \quad j = 0, \dots, (K/2) - 1 \quad (30)$$

Z uvedeného vyplýva, že akonáhle nájdeme vhodný DP filter, resp. \mathbf{g}_0 , potom zvyšných $(K-1)$ QMF vypočítame na základe rovníc (11), (26) a (28). Vhodná impulzná charakteristika \mathbf{g}_0 bude pritom určená použitím optimalizačnej metódy s ohraničeniami [7]. Tento filter musí vyhovovať podmienkam ortonormality daný vzťahom (10), čomu zodpovedá N/K rovníc. Okrem týchto \mathbf{g}_0 musí tiež vyhovovať rov. (19) pre každú maticu $\mathbf{D}_{i,j,k}$, ktorá nevyhovuje vyššie uvedeným podmienkam a), b) alebo c). Pre 4-kanálovú banku QMF analýzy je postačujúcich N/K rovníc ortonormality daných rov. (10) a žiadne ďalšie ohraničenia nie sú nutné. S ohľadom na rov. (19) je potrebné uvažovať iba matice $\mathbf{D}_{0,0,k}$ pre $k=0, \dots, (N/K)-1$. Avšak pre $K=8$ pristupuje najviac $[(N/K)-1]$ dodatočných ohraničení. Okrem matíc $\mathbf{D}_{0,0,k}$ je potrebné uvažovať tiež matice $\mathbf{D}_{i,i+4,k}$ pre $k=0, \dots, (N/K)-1$. Dá sa ľahko overiť, že

$$\mathbf{D}_{0,4,k} = -\mathbf{D}_{1,5,k} = \mathbf{D}_{2,6,k} = -\mathbf{D}_{3,7,k}, \quad k=1, \dots, (N/K)-1 \quad (31)$$

Splnenie rov. (19) pre $\mathbf{D}_{0,4,k}$ zabezpečuje, že to je splnené aj pre $\mathbf{D}_{1,5,k}, \mathbf{D}_{2,6,k}$ a $\mathbf{D}_{3,7,k}$. Pre 8-kanálové banky QMF je celkový počet ohraničujúcich rovníc na \mathbf{g}_0 rovný $(2N/K)-1$. Pre 16-kanálové banky QMF ich je $(6N/K)-4$ a pre 32-kanálové $(16N/K)-10$. V tab.1 je uvedený celkový počet podmienok kladených na filter \mathbf{g}_0 pre systémy s rôznym počtom kanálov K a dĺžkou filtrov N , pričom pomlčka v tabuľke značí, že ide o neprípustnú kombináciu podľa vyššie uvedených predpokladov. Pre $K=16$ rov. (19) musí byť splnená pre nasledovné matice: $\mathbf{D}_{0,0,k}, \mathbf{D}_{0,8,k}, k=0, \dots, (N/K)-1, \mathbf{D}_{0,7,k}, \mathbf{D}_{0,9,k}, \mathbf{D}_{0,10,k}, \mathbf{D}_{0,11,k}$

$k=1, \dots, (N/K)-1$. Podobne pre $K=32$ platí pre matice: $\mathbf{D}_{0,0,k}$, $\mathbf{D}_{0,15,k}$, $\mathbf{D}_{0,17,k}$, $\mathbf{D}_{0,18,k}$, $\mathbf{D}_{0,20,k}$, $\mathbf{D}_{0,24,k}$, $k=0, \dots, (N/K)-1$, $\mathbf{D}_{0,7,k}$, $\mathbf{D}_{0,11,k}$, $\mathbf{D}_{0,13,k}$, $\mathbf{D}_{0,14,k}$, $\mathbf{D}_{0,19,k}$, $\mathbf{D}_{0,21,k}$, $\mathbf{D}_{0,22,k}$, $\mathbf{D}_{0,25,k}$, $\mathbf{D}_{0,26,k}$, $\mathbf{D}_{0,28,k}$, $k=1, \dots, (N/K)-1$.

Najviac používaná miera účinnosti subpásmových kódovacích systémov je subpásmový zisk [1,14]

$$G_{SP} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \sigma_k^2 / \left[\prod_{k=0}^{K-1} \sigma_k^2 \right]^{1/K} \quad (32)$$

Dĺžka filtrov N	Počet kanálov - K				
	2	4	8	16	32
8	4	2	1	-	-
16	8	4	3	2	-
24	12	6	5	-	-
32	16	8	7	8	6
48	24	12	11	14	-
64	32	16	15	20	22

Tab. 1 Celkový počet podmienok, ktorým musí vyhovovať \mathbf{g}_0

Tab. 1 The total numbers of conditions that \mathbf{g}_0 must satisfy

kde σ_k^2 je disperzia výstupného signálu k-teho QMF analýzy pre daný vstupný signál, pričom platí

$$\sigma_k^2 = R_{y_k}(0) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_x(m) d_k(-m), \quad k=0, \dots, K-1 \quad (33)$$

a

$$d_k(m) = d_m(\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{g}_k(n) \mathbf{g}_k(n+m), \quad k=0, \dots, K-1 \quad (34)$$

kde $d(m)$ reprezentuje autokorelačnú funkciu impulznej charakteristiky k-teho QMF analýzy. Navrhli sme K-kanálové systémy s dĺžkou filtrov N, ktoré maximalizujú kódovací zisk pre Markovov model signálu s autokorelačnou funkciou

$$R_x(m) = (0,95)^{|m|}, \quad m=0, \pm 1, \dots \quad (35)$$

Napr. pre prípad $K=4$, $N=16$ potrebujeme určiť prvých osem koeficientov impulznej charakteristiky $\mathbf{g}_0(n)$. Po vypočítaní matíc $\mathbf{D}_{i,j,k}$ možno ukázať, že existujú iba štyri rôzne matice pre ktoré musí byť splnená rov.(19) voľbou impulznej charakteristiky $\tilde{\mathbf{g}}_0$. Sú to matice $\mathbf{D}_{0,0,0}$, $\mathbf{D}_{0,0,1}$, $\mathbf{D}_{0,0,2}$ a $\mathbf{D}_{0,0,3}$. V návrhu banky QMF hľadáme \mathbf{g}_0 tak, aby G_{SP} bol maximálny vzhľadom na ohraničujúce podmienky

$$\tilde{\mathbf{g}}_0^T \mathbf{D}_{0,0,k} \tilde{\mathbf{g}}_0 = \delta_k, \quad k=0,1,2,3 \quad (36)$$

Pre riešenie úlohy sme použili optimalizačný program CONSTR.M z optimalizačného toolboxu MATLAB. Pre našu úlohu sme použili zápis $[x, \text{options}] = \text{constr}('gain', x0, \text{options})$, kde x je bod, v ktorom má účelová funkcia minimum. Je zrejme, že hľadanie maxima funkcie 'gain' je ekvivalentné

hľadaniu minima funkcie -(gain). Parameter $x0$ je inicializačný bod optimalizácie a parametre options sú nastavenia vlastností optimalizácie. Inicializačné body $x0$ sme získali prostredníctvom funkcie fir1, ktorej všeobecný zápis je $x0 = \text{fir1}(N-1, Wn)$. Táto funkcia navrhne číslicový DP filter s dĺžkou N a jeho koeficienty uloží do vektora $x0$. Medzná frekvencia Wn musí byť v intervale $0 < Wn < 1$. Vo funkcii fir1 sme použili Kaiserovu oknovú funkciu s parametrom $\beta=4$. Vo vektore options bola nastavená hodnota options(4)=1e-10, aby boli presnejšie splnené podmienky ortonormality dané rov.(19). V options (13) sme nastavili počet obmedzujúcich podmienok podľa tab.1 a počet iterácií options (14) na 10^4 .

3. VÝPOČET WAVELETOV

V signálovom priestore spojitéch funkcií v čase $f(t)$ s konečnou energiou je spojitá waveletová transformácia (SWT) definovaná ako skalárny súčin

$$\text{SWT}\{f(t), a, b\} = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle \quad (37)$$

kde $\psi(t)$ je prototypová alebo základná waveletová funkcia s parametrami mierky (a) a posunutia (b). V praktických aplikáciách waveletovej transformácie sa obvykle používa jej diskretná forma (DWT) a v prípade dyadických waveletov parametre transformácie budú diskretné:

$$a = a_0^{-r} = 2^{-r}, \quad b = nb_0 a^{-r} = n2^{-r}, \quad b_0 = 1, \quad a_0 = 2,$$

$r, n \in \mathbb{Z}$. Ďalej uvažujeme mierkovú funkciu $\phi(t)$, ktorá vyhovuje rovnici [1,5]

$$\phi(t) = \sum_n \sqrt{K} g_0(n) \phi(Kt - n) \quad (38)$$

spolu s (K-1) waveletmi

$$\psi^{(i)}(t) = \sum_n \sqrt{K} g_i(n) \phi(Kt - n), \quad i=1, \dots, K-1, \quad (39)$$

ktoré vytvoria úplnú bázu funkcií. Najčastejšie používanými spôsobmi výpočtu mierkovej funkcie a waveletov sú metódy rekurzívnej iterácie [12]. My sme pre výpočet mierkovej funkcie použili metódu, ktorá uskutočňuje rekurzívne iterácie pomocou rov. (38). Pre prvú iteráciu sme použili mierkovú funkciu v tvare trojuholníka na intervale $t \in \langle 0, 2 \rangle$ s hodnotou $\phi(1)=1$. Wavelety v jednotlivých kanáloch boli vypočítané pomocou rov. (39).

Pri výpočte waveletov pomocou iterácií na základe koeficientov QMF, dôležitou vlastnosťou je tzv. regularita výsledných funkcií. Pod pojmom "regulárny" sa rozumie, že časovo spojitá waveletová funkcia $\psi^{(i)}(t)$ a mierková funkcia $\phi(t)$ sú prinajmenšom spojitá, alebo v lepšom prípade majú spojitú prvú alebo druhú deriváciu. Bez doplnkových opatrení pri návrhu systému K kanálovej banky QMF môžu tieto iterácie viesť k funkciám frak-

tálového typu pre $\phi(t)$ aj $\psi^{(i)}(t)$. Aby sme mohli stanoviť nutné podmienky pre regularitu waveletov využijeme momenty waveletových funkcií. Nech $\mu_k^{(0)}$ značí k -ty moment mierkovej funkcie $\phi(t)$ a $\mu_k^{(i)}$ waveletovej funkcie $\psi^{(i)}(t)$, t.j.

$$\mu_k^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \phi(t) dt \quad (40)$$

$$\mu_k^{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi^{(i)}(t) dt, \quad i=1, \dots, K-1 \quad (41)$$

Nech k -ty moment postupnosti $g_i(n)$ je daný takto

$$v_k^{(i)} = \sum_n n^k g_i(n), \quad i=1, \dots, K-1 \quad (42)$$

Pre regularitu básových funkcií požadujeme, aby R momentov každého waveletu $\psi^{(i)}(t)$ bolo rovných nule, t.j.

$$\mu_k^{(i)} = 0, \quad k=0, \dots, R-1, \quad i=0, \dots, K-1 \quad (43)$$

Lema 1: pre momenty $\mu_k^{(i)}$ a $v_k^{(i)}$ platí nasledujúci vzťah

$$\mu_k^{(i)} = (1/K^{(k+i)/2}) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} v_j^{(i)} \mu_{k-j}^{(0)}, \quad i=0, \dots, K-1 \quad (44)$$

Lema 2: Aby prvých R momentov waveletovej funkcie bolo rovných nule, musí mať prenosová funkcia príslušného QMF R -násobnú nulu v $z=1$. Dôsledkom tejto lemy je požiadavka, aby $G_i(z)$ boli tvaru

$$G_i(z) = (1-z^{-1})^R S_i(z), \quad i=1, \dots, K-1 \quad (45)$$

Lema 3: Ak pásmové filtre $G_i(z)$, $i=1, \dots, K-1$ majú R -násobnú nulu v bode $z=1$, potom prenosová funkcia prototypového DP filtra $G_o(z)$ má nuly v bodoch $z=W_K^k$, $k=1, \dots, K-1$ kde $W_K=e^{-j2\pi/K}$. Lema 3 má za následok, že prenosová funkcia prototypového DP filtra $G_o(z)$ musí byť v tvare

$$G_o(z) = \left[\prod_{i=0}^{\log_2(K)-1} (1+z^{-2^i}) \right]^R S_o(z) \quad (46)$$

kde $S_o(z)$ je polynóm premennej z^{-1} . Pre vyjadrenie podmienok regularity v časovej oblasti definujeme novú postupnosť $r_i(n)$ nasledovne

$$r_i(n) = \sum_{l=0}^{N/K-1} (n+lK)^i g_o(n+lK), \quad n=0, \dots, K-1, \quad i=0, \dots, R-1 \quad (47)$$

Použitím rov. (46) môže byť ukázané, že pre regularitu R -tého rádu výsledných waveletových funkcií, musia byť postupnosti $r_i(n)$ nezávislé od n , t.j.

$$r_i(n)=C=\text{konštanta}, \quad n=0, \dots, K-1, \quad i=0, \dots, R-1 \quad (48)$$

Uvedené podmienky regularity sme ďalej použili pri metóde návrhu banky QMF rozpracovanej v kap. 2. Napr. po dosadení za $K=4$, $N=16$ a $R=2$ do rov. (47) a uvažujúc rov. (48) ako aj vlastnosť symetrie impulznej charakteristiky $g_o(n)$ dostaneme nasledujúce ohraničujúce podmienky

$$\begin{aligned} g_o(0) - g_o(1) - g_o(2) + g_o(3) - g_o(4) - g_o(5) - \\ g_o(6) + g_o(7) = 0 \\ -15g_o(0) + 13g_o(1) - 11g_o(2) + 9g_o(3) - 7g_o(4) + \\ 5g_o(5) - 3g_o(6) + g_o(7) = 0 \\ 14g_o(0) - 2g_o(1) + 12g_o(2) + 4g_o(3) + 4g_o(4) - \\ 10g_o(5) - 6g_o(6) + 9g_o(7) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

a pre $K=8$, $N=16$, $R=1$ tieto ohraničujúce podmienky budú

$$\begin{aligned} g_o(0) - g_o(3) + g_o(4) + g_o(7) = 0 \\ g_o(0) - g_o(2) + g_o(5) + g_o(7) = 0 \\ g_o(0) - g_o(1) - g_o(6) + g_o(7) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

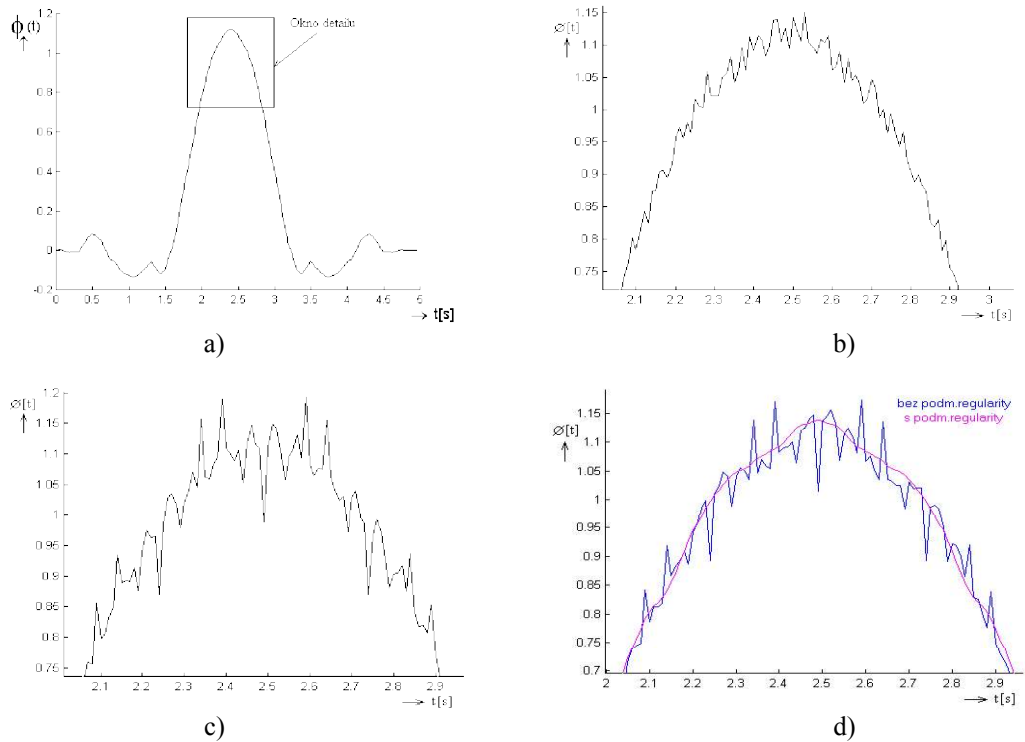
4. EXPERIMENTÁLNE VÝSLEDKY

Na základe rozpracovanej teórie bol vypracovaný algoritmus výpočtu waveletov pomocou banky QMF. Navrhnuté programové prostriedky umožňujú výpočet impulzných charakteristík QMF analýzy a syntézy pre dĺžky ich impulzných charakteristík $N=8, 16, 24, 32, 48$ a 64 a počet kanálov $K=2, 4, 8, 16$ a 32 . Dosiagnuté hodnoty maximálnych subpásmových ziskov G_{SP} pre Markovov model vstupného signálu daný rov. (35) sú uvedené v tab.2.

Dĺžka filtra N	Počet kanálov K				
	2	4	8	16	32
8	3,2025	6,2518	6,4153	-	-
16	3,2029	6,8535	7,8047	7,0169	-
24	3,2088	7,0034	8,0549	-	-
32	3,2278	7,0491	8,2367	8,0005	7,3714
48	3,3400	7,0879	8,3479	8,1332	-
64	3,5677	7,0959	8,3836	8,2175	7,2781

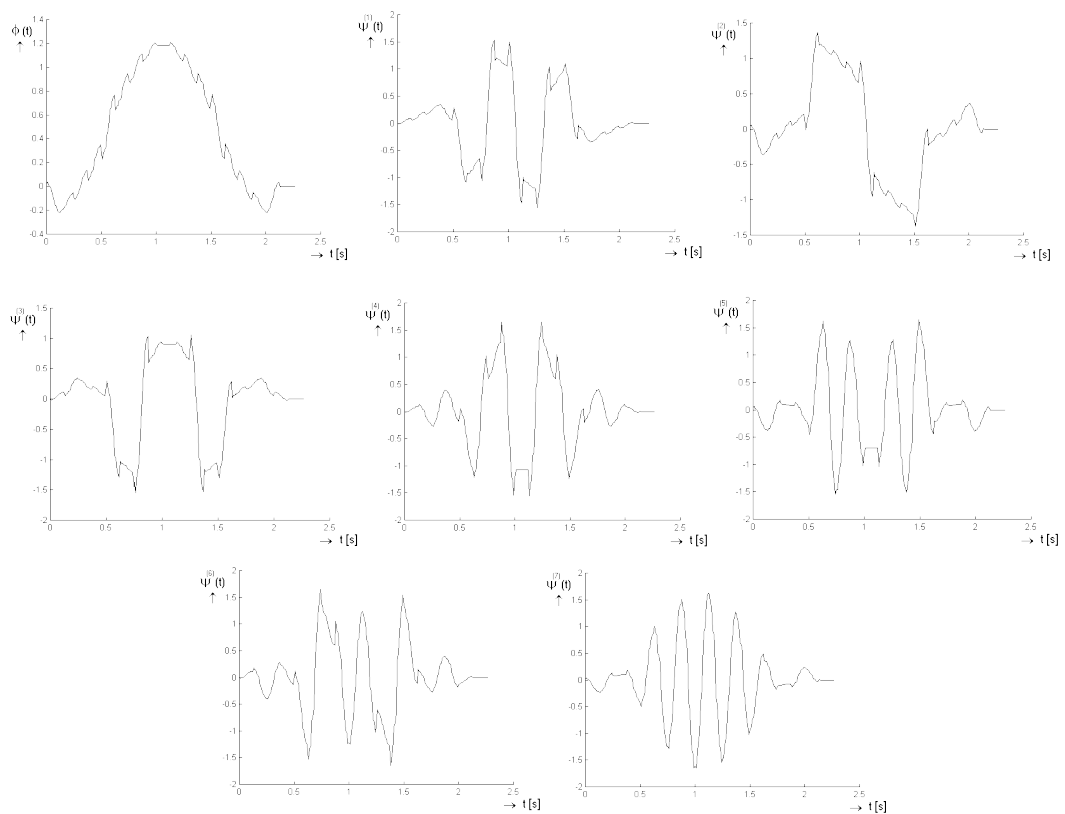
Tab. 2 Subpásmový zisk pre rôzne hodnoty N a K
Tab. 2 Subband gain for various values N and K

Výpočet mierkovej funkcie $\phi(t)$ iteračnou metódou pomocou impulznej charakteristiky $g_o(n)$ pre $K=4$, $N=16$ je znázornený na obr. 2. Na obr. 2a je mierková funkcia s vyznačením detailu po 2. iterácii, na obr. 2b a 2c sú detaily mierkovej funkcie po 6. iterácii a 14 iterácii. Pre porovnanie sú na obr.2d znázornené detaily mierkovej funkcie pre $K=4$, $N=16$ bez podmienok regularity a mierkovej funkcie pre $K=4$, $N=16$ s regularitou $R=2$. Ako dostatočný počet iterácií k tomu, aby funkcie mierky skonvergovali do konečnej podoby sa ukázal počet 10. Z obr. 2 je vidno, že ak použijeme koeficienty dolnej priepuste, pri optimalizácii ktorých neboli uvažované podmienky regularity nerovnosti na mierkovej funkcii sa počas jednotlivých iteračných krokov budú zväčšovať.



Obr. 2 a) Mierková funkcia s vyznačením detailu po 2.iterácii, detail mierkovej funkcie po b) 6.iterácii,c) 14.iterácii, d) detaily mierkovej funkcie po 14.iterácii bez podmienok regularity a s regularitou $R=2$

Fig. 2 a) Scaling function with marking of detail after 2.iteration , detail of scaling function after b) 6. iteration, c) 14. iteration, d) details of scaling function after 14.iteration without regularity conditions and with the regularity $R=2$



Obr. 3 Mierková funkcia a wavelety pre $K=8$, $N=16$, $R=1$
Fig. 3 Scaling function and wavelets for $K=8$, $N=16$, $R=1$

Vypočítaná mierková funkcia $\phi(t)$ a wavelety $\Psi^{(i)}(t)$, $i=0,1,\dots,7$ pre $K=8$, $N=16$ a $R=1$ sú znázornené na obr. 3.

n	$g_0(n)$	$g_1(n)$	$g_2(n)$	$g_3(n)$
0	0.0305506973	0.0199081055	0.0199081055	0.0305506973
1	-0.0199081055	-0.0305506973	0.0305506973	0.0199081055
2	-0.0584752111	-0.0381048806	-0.0381048806	-0.0584752111
3	-0.0381048806	-0.0584752111	0.0584752111	0.0381048806
4	-0.0367062753	-0.1688409998	-0.1688409998	-0.0367062753
5	0.1688409998	0.0367062753	-0.0367062753	-0.1688409998
6	0.4095423167	0.5442604587	0.5442604587	0.4095423167
7	0.5442604587	0.4095423167	-0.4095423167	-0.5442604587
8	0.5442604587	-0.4095423167	-0.4095423167	0.5442604587
9	0.4095423167	-0.5442604587	0.5442604587	-0.4095423167
10	0.1688409998	-0.0367062753	-0.0367062753	0.1688409998
11	-0.0367062753	0.1688409998	-0.1688409998	0.0367062753
12	-0.0381048806	0.0584752111	0.0584752111	-0.0381048806
13	-0.0584752111	0.0381048806	-0.0381048806	0.0584752111
14	-0.0199081055	0.0305506973	0.0305506973	-0.0199081055
15	0.0305506973	-0.0199081055	0.0199081055	-0.0305506973

Tab. 3 Koeficienty QMF analýzy pre $K=4$, $N=16$, $R=2$

Tab. 3 Analysis filter coefficients for $K=4$, $N=16$, $R=2$

Ako príklad sú v tab.3 uvedené optimalizované koeficienty QMF analýzy pre $K=4$, $N=16$, $R=2$ a v tab.4 sú optimalizované koeficienty QMF analýzy pre $K=8$, $N=16$, $R=1$.

n	$g_0(n)$	$g_1(n)$	$g_2(n)$	$g_3(n)$
0	0.0652612510	0.0270061378	0.1080680279	0.0347580046
1	0.0270061378	0.0652612510	0.0347580046	0.1080680279
2	0.0347580046	0.1080680279	0.0270061378	0.0652612510
3	0.1080680279	0.0347580046	0.0652612510	0.0270061378
4	0.2454853625	0.3187953859	0.4188146416	0.3805595284
5	0.3187953859	0.2454853625	0.3805595284	0.4188146416
6	0.3805595284	0.4188146416	0.3187953859	0.2454853625
7	0.4188146416	0.3805595284	0.2454853625	0.3187953859
8	0.4188146416	0.3805595284	0.2454853625	0.3187953859
9	0.3805595284	0.4188146416	0.3187953859	0.2454853625
10	0.3187953859	0.2454853625	0.3805595284	0.4188146416
11	0.2454853625	0.3187953859	0.4188146416	0.3805595284
12	0.1080680279	0.0347580046	0.0652612510	0.0270061378
13	0.0347580046	0.1080680279	0.0270061378	0.0652612510
14	0.0270061378	0.0652612510	0.0347580046	0.1080680279
15	0.0652612510	0.0270061378	0.1080680279	0.0347580046

n	$g_4(n)$	$g_5(n)$	$g_6(n)$	$g_7(n)$
0	0.0270061378	-0.1080680279	0.0347580046	-0.0652612510
1	-0.0652612510	0.0347580046	-0.1080680279	0.0270061378
2	0.1080680279	0.0270061378	0.0652612510	0.0347580046
3	-0.0347580046	-0.0652612510	-0.0270061378	-0.1080680279
4	-0.3187953859	0.4188146416	-0.3805595284	0.2454853625
5	0.2454853625	-0.3805595284	0.4188146416	-0.3187953859
6	0.4188146416	0.3187953859	0.2454853625	0.3805595284
7	-0.3805595284	-0.2454853625	-0.3187953859	-0.4188146416
8	-0.3805595284	-0.2454853625	0.3187953859	0.4188146416
9	0.4188146416	0.3187953859	-0.2454853625	-0.3805595284
10	0.2454853625	-0.3805595284	-0.4188146416	0.3187953859
11	-0.3187953859	0.4188146416	0.3805595284	-0.2454853625
12	-0.0347580046	-0.0652612510	0.0270061378	0.1080680279
13	0.1080680279	0.0270061378	-0.0652612510	-0.0347580046
14	-0.0652612510	0.0347580046	0.1080680279	-0.0270061378
15	0.0270061378	-0.1080680279	-0.0347580046	0.0652612510

Tab. 4 Koeficienty QMF analýzy pre $K=8$, $N=16$, $R=1$

Tab. 4 Analysis filter coefficients for $K=8$, $N=16$, $R=1$

Vykonaná bola tiež optimalizácia QMF analýzy pre $N=8,16,24,32$ a $K=4,8$ pri uvažovaní podmienok regularity. Dosažené hodnoty subpásmových ziskov pre uvažovaný Markovov model vstupného

signálu sú v tab. 5. Z porovnania G_{SP} v tab. 5 a 2 vidno, že dosiahnuté hodnoty G_{SP} sa pri uvažovaní podmienok regularity menia len veľmi málo.

N	K=4	K=8
8	6.2515 R=1	
16	6.8425 R=1 6.8325 R=2	7.8283 R=1
24	6.9991 R=1 6.9949 R=2 6.9327 R=3	8.0646 R=1
32	7.0423 R=3	8.2468 R=1

Tab. 5 Subpásmový zisk pre rôzne hodnoty N, K a regularitu R

Tab. 5 Subband gain for various values N, K and regularity R

Nakoniec bola vykonaná simulácia K-kanálovej banky QMF na obr.1 pre vstupný diskretný signál

$$x(n)=1/[1+((n-25)/\pi)^2], \quad n=0,1,\dots,N_1=50 \quad (51)$$

Vypočítané hodnoty strednej kvadratickej chyby

$$\varepsilon = \left\{ \sum_{n=0}^{N_1-1} [x(n) - \hat{x}(n+N-1)]^2 \right\} / N_1 \quad (52)$$

rekonštrukcie tohto signálu pre $K=2,4,8,16,32$ a $N=8,16,24,32,48,64$ sú v tab.6. Vypočítané hodnoty strednej kvadratickej chyby ε potvrdzujú vlastnosť DR vyjadrenej rov. (3).

N	Počet kanálov K				
	2	4	8	16	32
8	1,569e-22	5,676e-23	3,285e-21	-	-
16	3,590e-21	3,141e-23	4,789e-28	7,676e-30	-
24	2,602e-29	4,306e-22	1,125e-25	-	-
32	6,162e-25	2,238e-25	2,663e-23	2,479e-21	3,971e-25
48	6,394e-22	2,295e-22	3,404e-21	4,047e-21	-
64	1,494e-23	8,688e-24	6,742e-24	3,071e-21	5,770e-25

Tab. 6 Hodnoty strednej kvadratickej chyby rekonštruovaného signálu

Tab. 6 Mean square error values of the reconstructed signal

5. ZÁVER

V článku sme prezentovali algoritmus výpočtu K-kanálových waveletov pomocou metódy rekurzívnej iterácie z koeficientov impulzných charakteristik bánk QMF s lineárnou fázovou frekvenčnou charakteristikou a dokonalou rekonštrukciou. Základom k tomu bolo nájdenie impulznej charakteristiky prototypového DP filtra pomocou numerickej optimalizácie pri použití subpásmového zisku ako účelovej funkcie.

Zostávajúcích (K-1) QMF analýzy sa získa z tohto DP filtra použitím operátorov preusporiadania. Podmienky ortonormality subpásmových QMF sú pritom pretransformované na ekvivalentné podmienky dolného priepustu $g_0(n)$. Pri výpočte waveletov sme do procesu optimalizácie začlenili podmienky regularity, čím sa nerovnosti na mierkovej funkcii a waveletoch počas jednotlivých iteračných krokov nezväčšovali na rozdiel od návrhov bez uvažovania podmienok regularity. Najväčšieho rádu regularity $R=3$ bolo dosiahnuté pre $K=4$, $N=24$ a 32.

Táto práca bola podporená s GAV MŠ a SAV SR v projekte č. 1/0384/03.

LITERATÚRA

- [1] Alkin, O. – Caglar, H.: Design of Efficient M-band Coders with Linear-Phase and Perfect Reconstruction Properties. IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.43, No.7, 1995, pp. 1579-1590.
- [2] Daubechies, I.: Orthonormal Bases of Compactly supported Wavelets. Commun. Pure Applied Math., Vol.41, No.7, 1988, pp. 909-996.
- [3] Delgosha, F. – Fekri, F.: Results on the Factorization of Multidimensional Matrices for Paraunitary Filter Banks over the Complex field. IEEE Trans. Signal Proc., Vol.52, No.5, 2004, pp. 1289-1303.
- [4] Dragotti, P.L. – Servetto, S. – Vetterli, M.: Filter Banks for Multiple Decryption Coding: Analysis and Synthesis. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 48, No. 7, 2002, pp. 2036-2052.
- [5] Fliege, N.J.: Multirate Digital Processing: Multirate Systems, Filter Banks, Wavelets. West Sussex, England: John Wiley & Sons, 1994.
- [6] Mallat, S.G.: A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, IEEE Trans. Patt. Recogn. Machine Intell., Vol. 11, No. 7, 1989, pp. 674-693.
- [7] MATLAB®.Using MATLAB. Version 6. The MATHWORKS,Inc., 2000.
- [8] Mihalík, J. – Zavacký, J. – Dzivý, J.: Perfect Reconstruction 2DQMF Bank for Subband Image Coding. Journal of Electrical Engineering, Vol. 47, No. 7-8, 1996, pp. 195-201.
- [9] Nguyen, T.Q.– Vaidyanathan, P.P.: Maximally Decimated Perfect Reconstruction FIR Filter Banks with Pairwise Mirror-Image Analysis and Synthesis Frequency Responses. IEEE Transactions, Acoustics, Speech, Signal Processing, Vol. 36, No. 5, 1988, pp. 693-706.
- [10] Smith, M. – Barnwell, T.P.: Exact Reconstruction for Tree-Structured Subband Coders. IEEE Transaction, Acoustics, Speech, Signal Processing, Vo. ASSP-34, June, 1986, pp. 434-441.
- [11] Strang, G. – Nguyen, T.: Wavelets and Filter Banks. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [12] Vaidyanathan, P.P.: Theory and Design of M-Channel Maximally Decimated Quadrature Mirror Filters with Arbitrary M, Having the Perfect-Reconstruction Property. IEEE Transactions, Acoustics, Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-35, No. 4, 1987, pp. 476-492.
- [13] Vetterli, M. – Herley, C.: Wavelet and Filter Banks: Relationships and New Results. In Proc. ICASSP, May, 1991, pp. 1723-1726.
- [14] Vrankić, M. – Seršić, D.: Adaptation Methods of 2-D Nonseparable Wavelet Filter Bank. Proc. of SMMSP 2002, 2002, pp. 235-242.
- [15] Zavacký, J. – Mihalík, J.: Mnohokanálové banky QMF filtrov s lineárnou fázovou frekvenčnou charakteristikou a dokonalou rekonštrukciou. Zborník vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou „Nové smery v spracovaní signálov V“, Liptovský Mikuláš, 2000, s. 161-165.
- [16] Zavacký, J. – Mihalík, J.: An Algorithm for Design of Cosine Modulated Filter Bank with Perfect Reconstruction. Journal of Electrical Engineering, Vol. 50, No. 5-6, 1999, pp. 127-133.

BIOGRAPHY

Jozef Zavacký He received the Ing. degree from the Technical University of Košice, Slovak Republic, in 1977 and the Ph.D. degree in Radioelectronics in 1992. Currently he is Assistant Professor at the Department of Electronics and Multimedia Telecommunications of Technical University, Košice. His present research interests are in signal theory, multichannel systems, sampling and interpolation of signals.

Ján Mihalík graduated from Technical University in Bratislava in 1976. Since 1979 he joined Faculty of Electrical Engineering and Informatics of Technical University of Košice, where received his PhD degree in Radioelectronics in 1985. Currently, he is Full Professor of Electronics and Telecommunications and the head of the Laboratory of Digital Image Processing and Videocommunications at the Department of Electronics and Multimedia Telecommunications. His research interests include information theory, image and video coding, digital image and video processing and multimedia videocommunications.